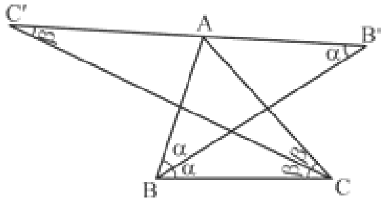
هندسه

خیلی از دانش‌آموزان وقتی با یک مسئله هندسه برخورد می‌کنند، نمی‌دانند از کجا شروع کنند. هر مسئله هندسه یک سری فرضیات دارد و در نهایت یک چیزی را می‌خواهد که به آن حکم می‌گویند. حل مسئله یعنی پیدا کردن یک مسیر از نقطهٔ شروع (فرض) تا نقطهٔ پایان (حکم). در مسائل ساده‌تر معمولاً می‌توان با کمی بررسی یک راهی از فرض به حکم پیدا کرد.

مثال: در مثلث ABC، از رأس A خطی موازی با ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی B و C را به ترتیب در B' و C' قطع کند. ثابت کنید $B'C' = AB + AC$.

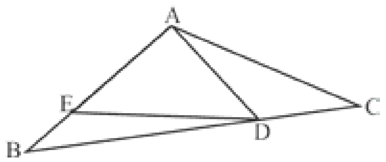


پاسخ: اولین گام در حل مسئله‌های هندسی رسم دقیق شکل است. در این سؤال در مورد نوع مثلث صحبتی نشده است. پس یک مثلث دلخواه رسم می‌کنیم. از فرض‌هایی که داده شده است استفاده می‌کنیم، یعنی از نیم‌ساز بودن و قضیهٔ موازی و مورب.

زاویه‌های برابر را در شکل نشان می‌دهیم و از این قضیه استفاده می‌کنیم که هرگاه دو زاویه از یک مثلث با هم برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AB' \\ AC = AC' \end{array}\right\} \Rightarrow AB + AC = AB' + AC' \Rightarrow B'C' = AB' + AC'$$

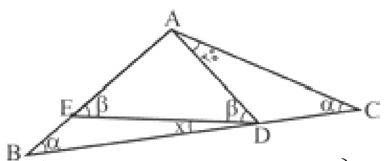
مثال: در مثلث شکل زیر، داریم $C\hat{A}D = 20^\circ$ و $AB = AC$ و $AE = AD$، اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{D}E$ چه‌قدر است؟



۱) 8°
۲) 9°
۳) 10°
۴) $10/5^\circ$
۵) $12/5^\circ$

پاسخ: از فرض‌های داده شده استفاده می‌کنیم و زاویه‌ها را برحسب α و β می‌نویسیم.

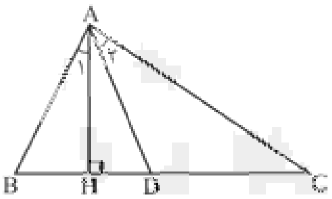
از قضیهٔ زاویه‌های خارجی در مثلث استفاده می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{EBD}: \beta = \alpha + x \Rightarrow x = \beta - \alpha \\ \overset{\Delta}{ADC}: \beta + x = 20^\circ + \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \beta + \beta - \alpha = 20^\circ + \alpha \Rightarrow 2\beta - 2\alpha = 20^\circ \Rightarrow \beta - \alpha = 10^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$$

در حل تعدادی دیگر از مسائل بهتر است از حکم شروع کنیم و به عقب برگردیم تا به فرض برسیم! این روش در حل مسائل جبری نیز قدرت زیادی دارد. با این روش مسائل سخت‌تری را می‌توان حل کرد.

مثال: در مثلث ABC ارتفاع AH و نیم‌ساز AD رسم شده است. ثابت کنید $H\hat{A}D=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$.



پاسخ: این بار حکم را نگاه می‌کنیم و به عقب برمی‌گردیم. برای اینکه ثابت کنیم $H\hat{A}D=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ کافیست ثابت کنیم که $\hat{B}-\hat{C}=2H\hat{A}D$. سپس B و C را برحسب زاویه‌های A_1 و A_2 جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=90^\circ-\hat{A}_1\\ \hat{C}=90^\circ-\hat{A}_2-H\hat{A}D\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=90-\hat{A}_1-(90-\hat{A}_2-H\hat{A}D)=\hat{A}_2-\hat{A}_1+H\hat{A}D$$

در نتیجه کافی است ثابت کنیم که $\hat{A}_2-\hat{A}_1+H\hat{A}D=2H\hat{A}D$ یا به عبارتی باید ثابت کنیم $\hat{A}_2-\hat{A}_1=H\hat{A}D$. یعنی باید ثابت کنیم $\hat{A}_2=H\hat{A}D+\hat{A}_1$. با توجه به نیم‌ساز بودن AD، درستی تساوی آخر بدیهی است. حالا می‌توانیم مسیری که برگشتیم را دوباره به سمت جلو حرکت کنیم، یعنی از $\hat{A}_2=H\hat{A}D+\hat{A}_1$ شروع کنیم و به حکم $H\hat{A}D=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ برسیم. زیرا تک‌تک مراحل مسیر را که به عقب حرکت کردیم، برگشت‌پذیر بودند.

$$\hat{A}_2=H\hat{A}D+\hat{A}_1\Rightarrow \hat{A}_2-\hat{A}_1=H\hat{A}D\Rightarrow \hat{A}_2-\hat{A}_1+H\hat{A}D=2H\hat{A}D\Rightarrow \underbrace{90-\hat{A}_1}_{B}-\underbrace{(90-\hat{A}_2-H\hat{A}D)}_{C}=2H\hat{A}D$$

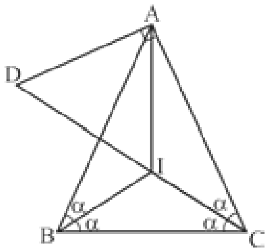
$$\Rightarrow B-C=2H\hat{A}D\Rightarrow \frac{B-C}{2}=H\hat{A}D$$

خیلی از مسائل پیچیده‌تر از آن هستند که شما بتوانید از حکم یا فرض شروع کنید و به صورت یک‌طرفه مسیر را طی کنید. خیلی از دانش‌آموزان وقتی با یک مسئلهٔ هندسه سخت برخورد می‌کنند، هر چیزی که به نظرشان به درد بخور می‌آید را می‌نویسند و استفاده می‌کنند. با این روش گاهی مسئله حل می‌شود، ولی در بعضی اوقات به جای حل مسئلهٔ موردنظر، چند مسئلهٔ دیگر حل می‌شود و خود مسئله حل نمی‌شود و حتی ممکن است به یک تساوی یا مطلب بدیهی برسند.

در واقع در مسائل سخت‌تر نباید بلافاصله شروع به نوشتن کرد. باید کمی با حکم بازی کرد، به عقب برگردیم و حکم را ساده‌تر کنیم و البته کمی هم با فرض کار کنیم و به جلو پیش رویم و در نهایت حکم ساده شده را ثابت کنیم.

مثال: در مثلث متساوی‌الساقین ABC، محل تلاقی نیم‌سازهای دو زاویه B و C را I و نقطهٔ برخورد نیم‌ساز زاویهٔ C با عمودی که در نقطهٔ A بر AC رسم شده است را نقطهٔ D می‌نامیم. ثابت کنید مثلث AID متساوی‌الساقین است.

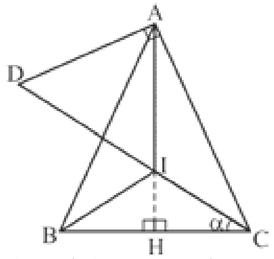
پاسخ: ابتدا یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



سپس حکم را ساده‌تر می‌کنیم. متساوی‌الساقین بودن $\overset{\Delta}{AID}$ معادل این است که دو زاویهٔ $A\hat{I}D$ و $A\hat{D}I$ برابر باشند. اندازهٔ زاویه‌های B و C را 2α در نظر می‌گیریم. زاویه‌های $A\hat{I}D$ و $A\hat{D}I$ را برحسب α به دست می‌آوریم.

$$\overset{\Delta}{ADC}: \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow D = 90^\circ - \alpha$$

حالا کافی است ثابت کنیم $A\hat{I}D$ هم برابر $90^\circ - \alpha$ است. AI را امتداد می‌دهیم تا در H، BC را قطع کند. با توجه به متساوی‌الساقین بودن ABC، نتیجه می‌گیریم که AI هم نیم‌ساز است و هم ارتفاع.



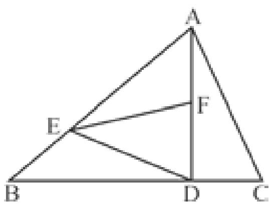
$$A\hat{I}D = C\hat{I}H = 90^\circ - \alpha$$

وقتی نمی‌توانید مسئله‌ای را حل کنید، مانند یک کارآگاه به فرض‌هایی که داده شده دقت کنید. هر فرض یک سرنخ است که شما را به جلو حرکت می‌دهد. همزمان که به نقطهٔ شروع یعنی فرض‌ها نگاه می‌کنید باید به نقطهٔ پایانی هم توجه کنید.

برای اینکه مسائل بهتر و سریع‌تر حل شوند، لازم است قضیه‌های مربوط به آن‌ها را خوب بدانید. همهٔ این توانایی‌ها با حل مسئلهٔ زیاد به دست می‌آیند.

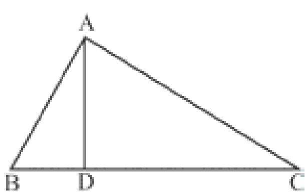
مثال: در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر 90° است. $BD = 2DC$ و $BE = \frac{1}{4}EA$ و نقطهٔ F وسط پاره‌خط AD است.

مساحت مثلث DEF کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۲۷
۵) ۳۰

پاسخ: برای حل این سؤال از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



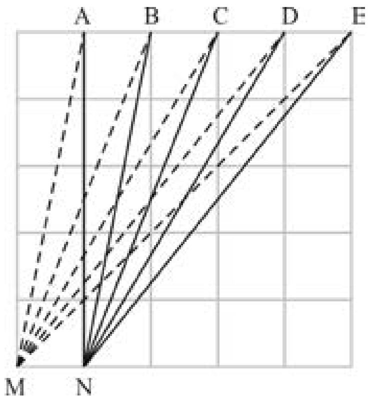
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$$

اگر بتوانیم مساحت مثلث DEF را برحسب مساحت مثلث ABC به دست آوریم، مسئله حل شده است.

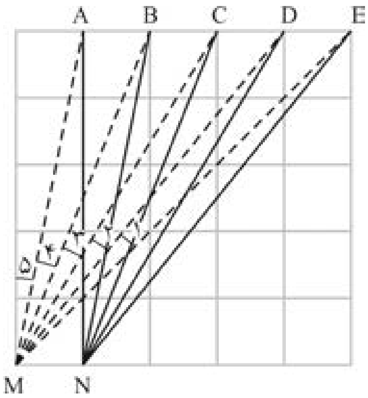
برای اینکه نسبت مساحت $\overset{\Delta}{DEF}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ را به دست بیاوریم، ابتدا نسبت مساحت $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ را به دست می‌آوریم و سپس نسبت مساحت $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABD}$ و در نهایت نسبت $\overset{\Delta}{DEF}$ و $\overset{\Delta}{ADE}$ را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{۲}{۳}\\[2mm] \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABD}}=\dfrac{EA}{AB}=\dfrac{۴}{۵}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\dfrac{۸}{۱۵}\\[2mm] \dfrac{S_{DEF}}{S_{ADE}}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{۴}{۱۵}\\[2mm] S_{ABC}=۹۰\end{array}\right\}\Rightarrow S_{DEF}=\dfrac{۴}{۱۵}\times ۹۰=۲۴$$

مثال: **یک مربع به ۲۵ مربع کوچک و برابر تقسیم شده است. مجموع زوایای $M\hat{A}N$، $M\hat{B}N$، $M\hat{C}N$، $M\hat{D}N$ و $M\hat{E}N$ چه‌قدر است؟**



پاسخ: پنج تساوی زیر را ثابت می‌کنیم:



$$M\hat{A}N=\hat{M}_۵ \qquad M\hat{B}N=\hat{M}_۴ \qquad M\hat{C}N=\hat{M}_۳$$

$$M\hat{D}N=\hat{M}_۲ \qquad M\hat{E}N=\hat{M}_۱$$

حال یکی از این پنج تساوی را اثبات می‌کنیم:

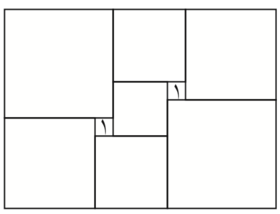
$$\left.\begin{array}{l}BC=MN\\ MB=NC\end{array}\right\}\Rightarrow MNCB \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}MB\parallel NC\\ BN \text{ مورب}\end{array}\right\}\Rightarrow M\hat{C}N=\hat{M}_۳$$

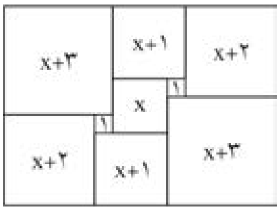
پنج تساوی دیگر را نیز به شکل مشابه ثابت می‌کنیم. پس:

$$M\hat{A}N+M\hat{B}N+M\hat{C}N+M\hat{D}N+M\hat{E}N=\hat{M}_۱+\hat{M}_۲+\hat{M}_۳+\hat{M}_۴+\hat{M}_۵=۴۵^\circ$$

در حل برخی مسئله‌های هندسی، جبر نقش زیادی دارد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: **یک مستطیل را به شکل روبه‌رو به مربّع‌هایی تجزیه کرده‌ایم. اندازهٔ عرض مستطیل برابر ۱۱ است. اگر طول ضلع کوچک‌ترین مربّع ۱ باشد، اندازهٔ طول مستطیل را پیدا کن.**





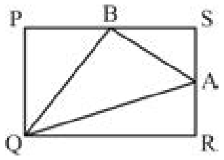
پاسخ: طول ضلع مربع وسط را x فرض می‌کنیم. پس طول ضلع بقیهٔ مربع‌ها هم برحسب x به‌دست می‌آید: درنتیجه عرض مستطیل برابر $(x+۳)+(x+۲)$ می‌شود که در صورت مسئله آمده بود که این مقدار برابر ۱۱ است. پس باید یک معادله حل کرد:

$$(x+۲)+(x+۳)=۱۱ \Rightarrow ۲x+۵=۱۱ \Rightarrow ۲x=۱۱-۵=۶ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

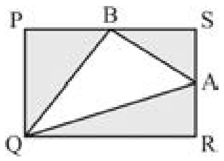
پس طول مستطیل می‌شود $(x+۲)+(x+۱)+(x+۳)$ که در آن $x=۳$ است.

در نتیجه طول مستطیل برابر است با $۱۵=(۲+۳)+(۳+۱)+(۳+۳)$.

مثال: **در شکل زیر مساحت مستطیل PQRS برابر ۱۰ است. نقطهٔ A روی RS و نقطهٔ B روی PS به گونه‌ای هستند که مساحت مثلث QAB برابر ۴ است. در این‌صورت مقدار $PB \times AR$ چند است؟** (آزمون IMC − ۲۰۰۵)



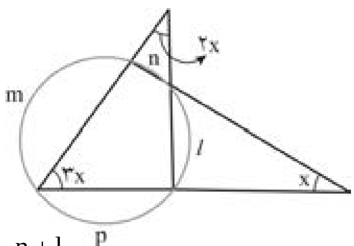
پاسخ: فرض کنید $BP=x$ و $AR=y$ و $PS=z$. در نتیجه $BS=z-x$ و $RS=\frac{۱۰}{z}$ و $AS=\frac{۱۰}{z}-y$. مجموع مساحت‌های مثلث‌های BQP، ABS و ARQ برابر ۶ است. یعنی:



$$\frac{۱}{۲}\left(x\frac{۱۰}{z}+(z-x)\left(\frac{۱۰}{z}-y\right)+yz\right)=۶$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{۱۰x}{z}}+\cancel{\frac{۱۰z}{z}}-\cancel{zy}-\cancel{\frac{۱۰x}{z}}+xy+\cancel{yz}=۱۲ \Rightarrow ۱۰+xy=۱۲ \Rightarrow xy=۲$$

مثال: **در شکل روبه‌رو زاویهٔ x چند درجه است؟** (مرحله اول المپیاد ریاضی)



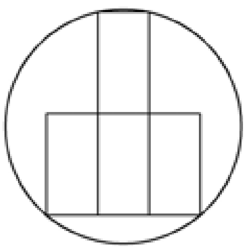
پاسخ:

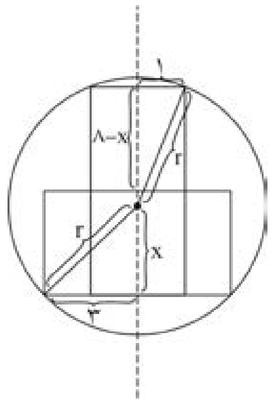
$$\frac{n+l}{۲}=۳x \Rightarrow n+l=۶x \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{m-l}{۲}=x \Rightarrow m-l=۲x\\ \frac{p-n}{۲}=۲x \Rightarrow p-n=۴x\end{aligned}\right\} \Rightarrow m-l+p-n=۶x \Rightarrow m+p-(l+n)=۶x \Rightarrow m+p-۶x=۶x \Rightarrow m+p=۱۲x \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} m+n+l+p=۱۸x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۲۰^\circ$$

مثال: **چهار تا مستطیل به ابعاد ۴×۲ مطابق شکل زیر کنار هم قرار دارند. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که همهٔ آن‌ها را دربر می‌گیرد چقدر است؟**





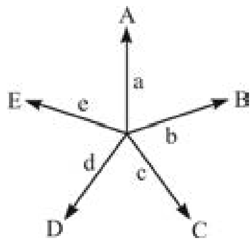
پاسخ: مرکز این دایره روی محور تقارن این شکل واقع شده است. دوبار از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} r^{۲}=x^{۲}+۳^{۲} \\ r^{۲}=(۸-x)^{۲}+۱^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow (۸-x)^{۲}+۱^{۲}=x^{۲}+۳^{۲}$$

$$\Rightarrow ۶۴+\cancel{x}^{۲}-۱۶x+۱=\cancel{x}^{۲}+۹ \Rightarrow ۱۶x=۵۶ \Rightarrow x=\frac{۵۶}{۱۶}=\frac{۷}{۲}$$

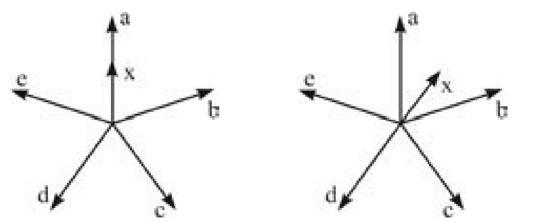
$$r^{۲}=x^{۲}+۳^{۲}=\left(\frac{۷}{۲}\right)^{۲}+۹=\frac{۴۹}{۴}+\frac{۳۶}{۴}=\frac{۸۵}{۴} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{۸۵}}{۲}$$

ایدهٔ دیگری که در حل مسائل مختلف ریاضی کاربرد دارد، ایدهٔ تقارن است. این ایده در حل مسائل جبری و ترکیبیات هم کاربرد فراوانی دارد.



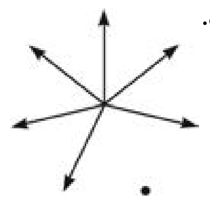
مثال: در شکل روبه‌رو، نقاط A، B، C، D و E تشکیل یک پنج ضلعی منتظم را مـی‌دهنـد.

ثابت کنید: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=۰$.

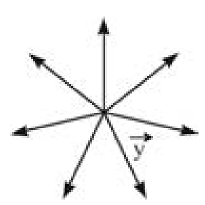


پاسخ: آن‌چه که در این مسئله بسیار به چشم می‌آید «تقارن» است. فـرض می‌کنیم جمع ۵ بردار ۰ نشود. در این‌صورت جمع آن‌ها برداری می‌شود کـه هم‌طول دارد و هم جهت. این بردار (مجموع) را $\vec{x}$ می‌نامیم. پس این بردار $\vec{x}$ باید یا موازی یکی از ۵ بردار شود یا بین دو تا از آن‌ها قـرار گیـرد. مـثلاً موازی $\vec{a}$ باشد یا بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

خب این سؤال برای ما پیش می‌آید: خب چرا $\vec{a}$؟ یا چرا بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$؟ مگر شکل متقارن نیست؟ بقیهٔ بردارها چه چیزی کم دارند؟ خب به دلیل تقارن نباید تبعیض وجود داشته باشد. پس فرض اولیه غلط بود. یعنی این فرض که بردار $\vec{x}$ برابر بـا ۰ نمـی‌شـود. در نتیجـه: $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=۰$



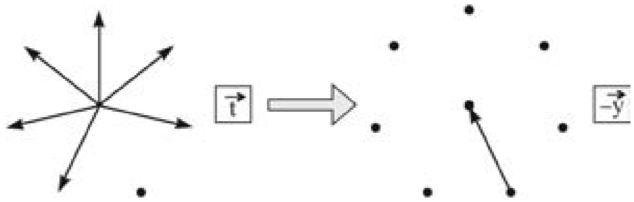
مثال: نقاط شکل روبه‌رو رئوس یک هفت ضلعی منتظم است. مجموع ۶ بردار نشان داده شده را پیدا کنید.



پاسخ: مجموع ۶ بردار را $\vec{t}$ فرض می‌کنیم. حال بردار $\vec{y}$ را اضافه می‌کنیم:

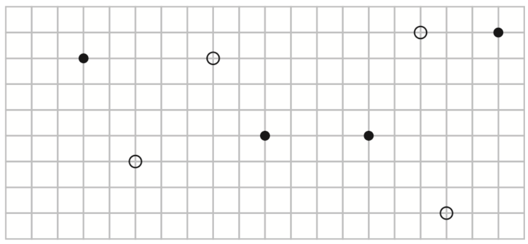
مجموع ۷ بردار ۰ می‌شود. پس داریم:

$\vec{t}+\vec{y}=۰ \Rightarrow \vec{t}=-\vec{y}$



در برخی از مواقع خوب است، قبل از اینکه به سرعت درگیر حل مسئله شویم، نگاهی از بالا به مسئله بینـدازیم. اگـر مسـئله در ظـاهر راه‌حـل پیچیده و زمان‌بری داشت، به احتمال زیاد راه‌حل مسئله آن چیزی که ما فکر می‌کنیم نیست و راه ساده‌تری وجود دارد. پس بیش‌تر فکر کنیم.

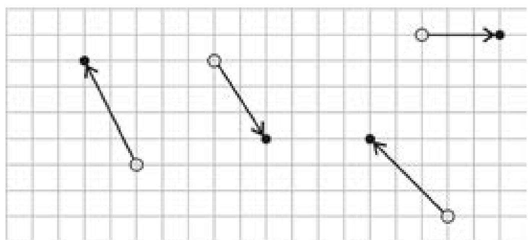
مثال: در شکل زیر ۴ نقطهٔ سفید و ۴ نقطهٔ سیاه دیده می‌شود.



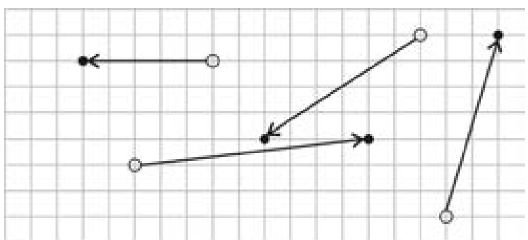
۴ بردار به دلخواه رسم می‌کنیم که ابتدای آن‌ها نقاط سفید و انتهای آن‌ها نقاط سیاه باشد و از همهٔ ۸ نقطـه اسـتفاده می‌کنیم. ثابت کنید در هر حالتی، مجموع این چهار بردار $\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}$ می‌شود.

مثلاً در حالت زیر، مجموع چهار بردار می‌شود:

$$\begin{bmatrix}-۲\\ ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\ -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\ ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}$$



و در حالت روبه‌رو نیز، مجموع چهار بردار می‌شود:



$$\begin{bmatrix}-۵\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹\\ ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۶\\ -۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\ ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}$$

پاسخ: جهت اطلاع بگوییم به ۲۴ حالت می‌توان طبق شرایط مسئله بردار کشید. آیا واقعاً می‌خواهی همهٔ ۲۴ حالت را بررسی کنی؟

اما راه حل بهتر! با کمی فکر کردن متوجه می‌شویم که رابطهٔ زیر را داریم:

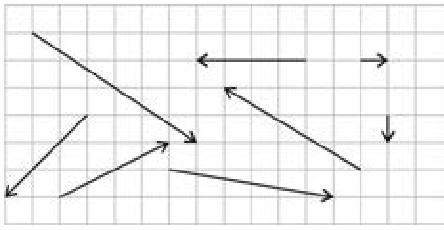
مختصات هر بردار = [مختصات نقطهٔ انتهایی] − [مختصات نقطهٔ ابتدایی]

پس برای مجموع بردارها داریم:

مختصات مجموع بردارها = [مجموع مختصات نقاط سیاه] − [مجموع مختصات نقاط سفید]

اگر نقطهٔ گوشهٔ چپ را مبدأ فرض کنیم، داریم:

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۳+۱۰+۱۴+۱۹\\ ۷+۴+۴+۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵+۸+۱۷+۱۶\\ ۳+۱+۱+۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۶\\ ۲۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴۶\\ ۱۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}$$



مثال: هشت برداری که در شکل روبه‌رو هستند را به چهار جفت تقسیم کنید که مجموع دو بردار هر جفت برابر با مجموع دو بردار در هر جفت دیگر شود.

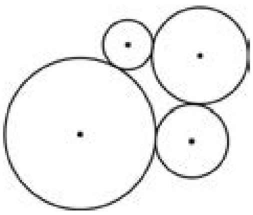
پاسخ: فرض می‌کنیم مجموع دو بردار در هر جفت، برابر با $\vec{a}$ شود. حال داریم:

$$\begin{bmatrix}-۳\\ -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\ -۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۵\\ ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ -۴\end{bmatrix}\Rightarrow ۴\vec{a}=\begin{bmatrix}۴\\ -۴\end{bmatrix}\Rightarrow \vec{a}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}$$

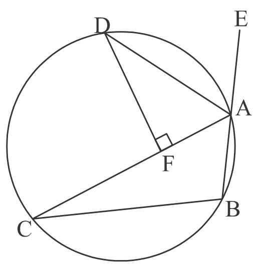
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\ -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\ -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}$$

تعداد زیادی از مسائل هندسه را نمی‌توان از قبل در دستهٔ خاصی قرار داد و لازم است که حل شوند تا مشخص شود چه ایده‌ای مناسب بوده است! البته ممکن است از چند راه، حل شوند. در واقع حل مسئلهٔ زیاد، هنرِ حل کردن را بالا می‌برد. در حین حل مسئله‌های فراوان، یاد می‌گیریم که کدام قضیه ممکن است استفاده شود و یا چه‌طور، خط یا خط‌هایی برای حل مسئله اضافه کنیم تا از فرض‌های داده شده استفاده شود.

مثال: چهار دایره به شکل زیر بر هم مماس شده‌اند. چهار مرکز این دایره‌ها را به هم وصل کنید تا یک چهارضلعی به‌وجود می‌آید، اگر مجموع دو ضلع روبه‌روی آن ۹۳ باشد، مجموع دو ضلع دیگر آن چند است؟

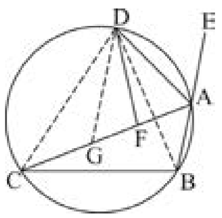


پاسخ: اگر مرکزها را به هم وصل کنیم اضلاع چهارضلعی از محل‌های مماس می‌گذرند و مجموع دو ضلع روبه‌روی این چهارضلعی با مجموع دو ضلع دیگر برابر است.



مثال: در شکل روبه‌رو چهار نقطهٔ A ،B ،C و D روی یک دایره قرار دارند. E نقطه‌ای روی امتداد BA است و AD نیم‌ساز زاویهٔ CAE است. F نقطه‌ای روی AC است، به‌طوری که DF بر AC عمود است. اگر BA = AF = ۲، طول پاره‌خط AC چند است؟

پاسخ: فرض کنید G نقطهٔ روی AC باشد، به طوری‌که $FG = AF = ۲$. درنتیجه $GD = AD$ و $D\hat{A}G = D\hat{G}A$. چون چهارضلعی $ABCD$ درون دایره محاط شده است، $D\hat{C}G = D\hat{B}A$. از طرفی:

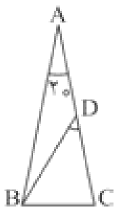


$$D\hat{G}C = ۱۸۰^\circ - D\hat{G}A = ۱۸۰^\circ - D\hat{A}G = ۱۸۰^\circ - D\hat{A}E = D\hat{A}B$$

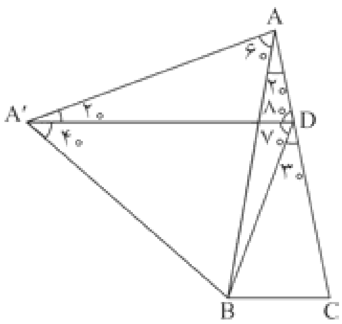
پس نتیجه می‌گیریم مثلث‌های DGC و DAB با هم برابرند و $GC = BA = ۲$. پس:

$$AC = AF + FG + GC = ۲ + ۲ + ۲ = ۶$$

مثال: **در مثلّث متساوی‌الساقین $ABC\,(AB = AC)$ اندازهٔ زاویهٔ A مساوی ۲۰° است. روی ساق AC، طول AD را مساوی قاعدهٔ BC در نظر گرفته و از D به B وصل می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{D}C$ را محاسبه کنید.**



پاسخ: مثلّث متساوی‌الساقین $A'AD$ را مساوی مثلّث متساوی‌الساقین ABC چنان رسم می‌کنیم که قاعده‌اش پاره‌خط AD باشد. از A' به نقطه‌های B و C وصل می‌کنیم. مثلّث $\overset{\triangle}{AA'B}$ متساوی‌الساقین است. زیرا $AA' = A'D = AB = AC$ است. از طرفی $A'\hat{A}D = ۸۰^\circ$ و $B\hat{A}C = ۲۰^\circ$ است. پس $A'\hat{A}B = ۶۰^\circ$ و درنتیجه مثلّث $\overset{\triangle}{A'AB}$ متساوی‌الاضلاع است. پس $A'B = A'A = AB$ و $A'\hat{A}B = A'\hat{B}A = ۶۰^\circ$، درنتیجه $A'B = A'D$ و $D\hat{A'}B = ۴۰^\circ$ است.

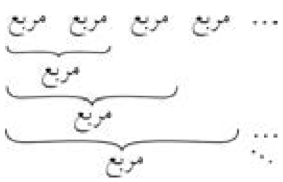


در مثلّث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{DA'B}$ چون $D\hat{A'}B = ۴۰^\circ$ است، پس هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعده مساوی ۷۰° هستند. یعنی $A'\hat{B}D = A'\hat{D}B = ۷۰^\circ$ است و چون $A\hat{B}C = A'\hat{D}A = ۸۰^\circ$ است، خواهیم داشت $B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۳۰^\circ$.

در ادامهٔ این بحث دوست داریم ایدهٔ زیبای دیگری را با شما در میان بگذاریم. در این مثال، یک مسئلهٔ پیچیده‌تر را به کمک حل یک مسئلهٔ ساده‌تر حل می‌کنیم.

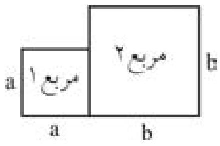
مثال: **۱۳۹۳ مربع داده شده‌اند. ثابت کن که می‌توان آن‌ها را به تکه‌هایی برید و این تکه‌ها را طوری کنار هم چید که یک مربع بزرگ تشکیل شود.**

پاسخ: ادعای من این است که اگر بتوان با ۲ مربع دلخواه مربع بزرگ‌تری ساخت کار تمام است.

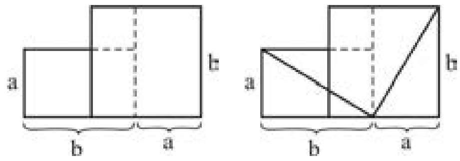


به این ترتیب با دو مربع، مربع جدید ساخته می‌شود. به همان روش با مربع جدید و یکی دیگر از مربع‌ها، مربع جدید دیگری ساخته می‌شود و به همین ترتیب در نهایت یک مربع بزرگ ساخته می‌شود.

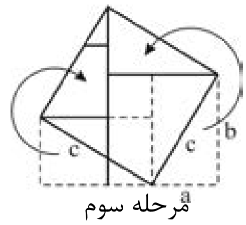
کافی است روشی ارائه کنیم که چطوری دو مربع دلخواه را برش دهیم و قطعات را کنار هم بچینیم که یک مربع بزرگ ساخته شود.
ضلع‌های مربع‌های کوچک‌تر را a و b در نظر می‌گیریم:



مرحله اول



مرحله دوم



مرحله سوم

مساحت مربع جدید ساخته شده برابر است با $c^۲$ و از طرفی برابر است با $a^۲+b^۲$.

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

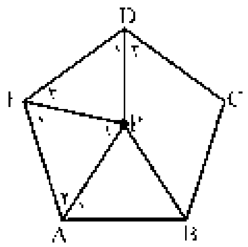
درست است! اثبات دیگری برای فیثاغورس!

در انتهای این قسمت با علم به اینکه بهترین راه برای بهتر شدن در حل مسئله‌های جدید، حل مسئله‌های بیش‌تر است، چند مثال مختلف می‌آوریم.

مثال: BCDE یک پنج‌ضلعی منتظم است. نقطهٔ P درون این پنج‌ضلعی قرار دارد، طوری که ABP مثلثی متساوی‌الاضلاع است. اندازه‌ی زاویهٔ $D\hat{P}E$ چند درجه است؟ *(مسابقات مدارس انگلستان)*

۱) ۴۲ ۲) ۵۴ ۳) ۶۰ ۴) ۸۴ ۵) ۱۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۴)؛



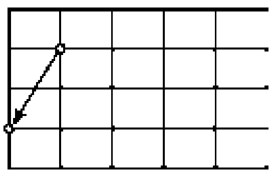
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۰۸^\circ \\ \hat{A}_۱ = ۶۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۴۸^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}_۱ + \hat{E}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۴۸^\circ = ۱۳۲^\circ \\ AE = AB = AP \Rightarrow \hat{P}_۱ = \hat{E}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_۱ = ۶۶^\circ \Rightarrow \hat{E}_۲ = ۴۲^\circ$$

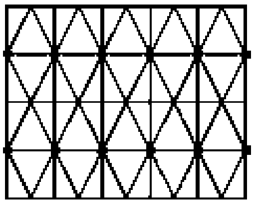
$$\left.\begin{array}{l}\text{تقارن}\quad \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ \\ \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۰۸^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۵۴^\circ$$

$$D\hat{P}E = ۱۸۰^\circ - \hat{E}_۲ - \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۴۲^\circ - ۵۴^\circ = ۸۴^\circ$$

مثال: یک توپ بیلیارد مطابق شکل از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ به سمت نقطهٔ $\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ حرکت می‌کند. اگر این توپ هیچ‌گاه متوقف نشود از کدام نقطه هیچ‌گاه عبور نمی‌کند؟ *(مسابقات مدارس انگلستان)*



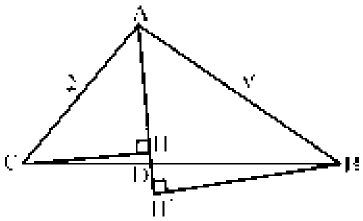
۱) $\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ ۵) $\begin{bmatrix}۵\\۳\end{bmatrix}$



پاسخ: گزینهٔ ۲)؛ کافی است مسیر حرکت توپ را ادامه دهیم. البته دقت کنید که توپ در نقطـهٔ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ بـه ضلع پایینی میز بیلیارد برخورد می‌کند.

همان‌طور که می‌بینید توپ در مسیر خود از تمام نقطه‌هایی که y آن‌ها فرد است می‌گذرد و از هـیچ نقطـهٔ دیگری نمی‌گذرد.

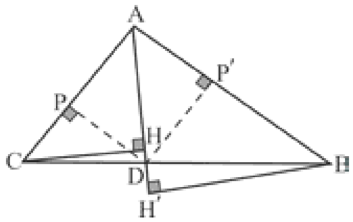
مثال: **در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، $AC = 5$ و $AB = 7$ اضلاع مثلث هستند و AD نیمساز زاویـهٔ A اسـت. از C و B دو عمـود CH و BH' را بر امتداد AD فرود آورده‌ایم. نسبت $\frac{CH}{BH'}$ کدام است؟**



۱) $\frac{20}{14}$ ۲) $\frac{10}{28}$ ۳) $\frac{14}{20}$

۴) $\frac{5}{7}$ ۵) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴)؛ از نقطهٔ D، عمودهای DP و DP' را به اضلاع مثلث وارد می‌کنیم. چون D روی نیمساز است، داریم: $DP' = DP$.



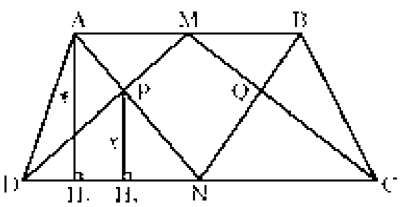
$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABD}} = \frac{AC \times DP}{AB \times DP'} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{7}$$

از طرفی نسبت زیر نیز برقرار است:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABD}} = \frac{AD \times CH}{AD \times BH'} \Rightarrow \frac{CH}{BH'} = \frac{5}{7}$$

مثال: **در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، M و N وسط‌های اضلاع AB و CD هستند و از طرفی:**

$$\begin{cases} DN = 8 \\ AH_1 = 4 \\ PH_2 = 2 \end{cases}$$

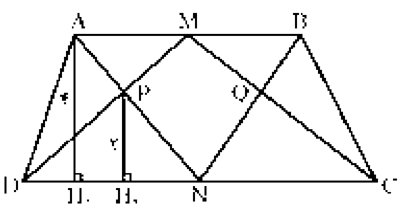


مساحت چهارضلعی MQNP چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۰

۵) ۲۰



پاسخ: گزینهٔ ۳)؛ چهارضلعی AMND یک ذوزنقه است، پس:

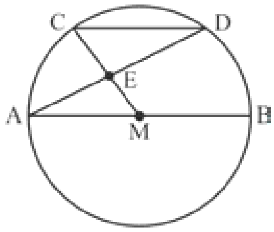
$$S_{ADN} = S_{MDN} \Rightarrow S_{ADN} - S_{PDN} = S_{MDN} - S_{PDN}$$

$$\Rightarrow S_{ADP} = S_{MNP} = \frac{4 \times 8}{2} - \frac{2 \times 8}{2} = 8$$

از طرفی چون ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، شکل متقارن است. پس مساحت MNQ نیز برابر با ۸ می‌شود.

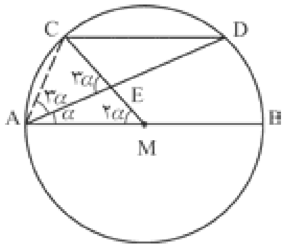
$8 + 8 = 16$

مثال: در شکل مقابل، AB قطر دایره به مرکز M است و CD وتر موازی AB است. اگر $AC = EC$ باشد، $C\hat{A}M$ چند درجه است؟



۱) ۴۵
۲) ۵۴
۳) ۶۳
۴) ۷۲
۵) ۸۱

پاسخ: گزینهٔ ۴)؛



$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{DB}$$

$$\left.\begin{array}{r} D\hat{A}B = \alpha = \dfrac{\widehat{DB}}{۲} \Rightarrow \widehat{DB} = ۲\alpha \\ \widehat{DB} = \widehat{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{M}A = \widehat{AC} = ۲\alpha$$

$$C\hat{E}A = C\hat{M}A + M\hat{A}E = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$

$$CE = AC \Rightarrow C\hat{E}A = C\hat{A}E \Rightarrow C\hat{A}E = ۳\alpha \Rightarrow \frac{\widehat{CD}}{۲} = ۳\alpha \Rightarrow \widehat{CD} = ۶\alpha \text{ , } \widehat{DB} = \widehat{AC} = ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = ۲\alpha + ۶\alpha + ۲\alpha = ۱۰\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AB} = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{AB} = ۱۰\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰^\circ = ۱۰\alpha \Rightarrow \alpha = ۱۸^\circ \qquad C\hat{A}M = ۳\alpha + \alpha = ۴\alpha \Rightarrow C\hat{A}M = ۴\times ۱۸^\circ = ۷۲^\circ$$

مثال: طول اضلاع یک مثلث سه عدد طبیعی متوالی است و شعاع دایرهٔ محاطی آن برابر است با ۴. طول ضلع وسط آن کدام است؟

(المپیادهای ریاضی رومانی)

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۷
۵) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۱)؛ برای حل این مسئله از قضیهٔ هرون استفاده می‌کنیم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

و از طرفی اگر اضلاع مثلث به ترتیب $a-۱$ و a و $a+۱$ باشد، محیط مثلث برابر $a+۱+a+a-۱=۳a$ است.

$$S^۲ = p(p-a)(p-b)(p-c) \xRightarrow{\times ۱۶} ۱۶S^۲ = ۲p(۲p-۲a)(۲p-۲b)(۲p-۲c)$$

$$\Rightarrow ۱۶S^۲ = ۳a(۳a-۲a)(۳a-۲a-۲)(۳a-۲a+۲) \Rightarrow ۱۶S^۲ = ۳a(a)(a-۲)(a+۲) = ۳a^۲(a^۲-۴)$$

و از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث:

$$\underset{\text{مساحت}}{S} = \underset{\text{شعاع دایرهٔ محاطی}}{r} \times \underset{\text{نصف محیط}}{p}$$

$$\left.\begin{array}{r} S = rp \Rightarrow S = ۴p \\ ۲p = ۳a \end{array}\right\} \Rightarrow S = ۶a \Rightarrow ۱۶S^۲ = ۱۶\times ۳۶a^۲ = ۳a^۲(a^۲-۴) \Rightarrow ۳a^۲(a^۲-۴-۱۶\times ۱۲) = ۰ \Rightarrow a^۲ = ۱۹۶ \Rightarrow a = ۱۴$$

ضلع کوچک $\rightarrow a-۱=۱۳$ ضلع متوسط $\rightarrow a=۱۴$ ضلع بزرگ $\rightarrow a+۱=۱۵$

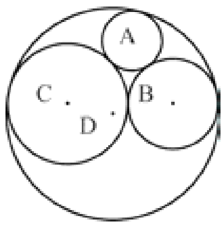
مثال: در یک شهر چهار مرکز کنترل آب در چهار نقطه به نام‌های A ، B ، C و D وجود دارد. این چهار نقطه مرکز چهار دایره هستند که سه تا از آن‌ها دو به دو بر هم مماس خارج هستند و دایرهٔ دیگر بر هر سه آن‌ها مماس داخل است. شعاع‌های این چهار دایره به اندازه‌های r_A ، r_B ، r_C و r_D است. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید داریم:

$r_A < r_B < r_C < r_D$

آقای آب‌پرور می‌خواهد این چهار مرکز را به ترتیب زیر بررسی کند:

وی از یک مرکز شروع می‌کند، سپس با یک مسیر مستقیم به یک مرکز دیگر می‌رود، و بعد به یک مرکز دیگر می‌رود، و پس از آن مرکز آخر را کنترل می‌کند و در آخر به نقطهٔ اوّل بازمی‌گردد.

او با طی کردن کدام مسیر، کم‌ترین مسافت را پیموده است؟



۱) DCABD

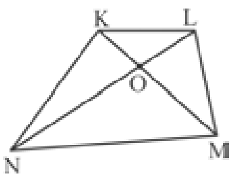
۲) DABCD

۳) DACBD

۴) ADBCA

۵) او از هر مسیری برود، مسافتش مقداری ثابت است.

پاسخ: گزینهٔ ۱)؛



(۱) $OK + QL > KL$

(۲) $ON + OM > NM$

(۳) $OL + OM > LM$

(۴) $OK + ON > KN$

$$KM + LN = OK + OM + OL + ON = (OK + OL) + (ON + OM) \xrightarrow{(1),(2)} KM + LN > KL + NM$$

$$KM + LN = (OK + ON) + (OL + OM) \xrightarrow{(3),(4)} KM + LN > KN + LM$$

حال می‌توانیم مسئله را حل کنیم:

$$DA + BC > AC + BD \Rightarrow (DA + BC) + AB + CD > AB + BD + DC + CA$$

$$DA + BC > CD + AB \Rightarrow (DA + BC) + AC + BD > AC + BD + CD + AB$$

(۱) مسیری که در گزینهٔ ۱ می‌پیماید برابر است با: $DC + CA + AB + BD$

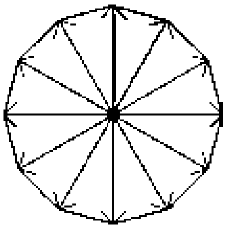
(۲) مسیری که در گزینهٔ ۲ می‌پیماید برابر است با: $DA + AB + BC + CD$

(۳) مسیری که در گزینهٔ ۳ می‌پیماید برابر است با: $DA + AC + CB + BD$

(۴) مسیری که در گزینهٔ ۴ می‌پیماید برابر است با: $AD + DB + BC + CA$

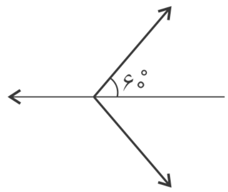
با توجه به توضیحات قبل و بررسی طول مسیر گزینه‌ها در بالا، می‌توان متوجه شد که طول مسیر ۱ یعنی DCABD از تمام مسیرهای دیگر کم‌تر است.

مثال: شکل مقابل ۱۲ بردار را نشان می‌دهد که انتهای آن‌ها رأس‌های یک دوازده‌ضلعی منتظم است و ابتدای آن‌ها مرکز دوازده‌ضلعی. می‌خواهیم n تا بردار از بین این ۱۲ بردار انتخاب کنیم که برآیند آن‌ها صفر شود. برای چند مقدار n این کار امکان‌پذیر است؟

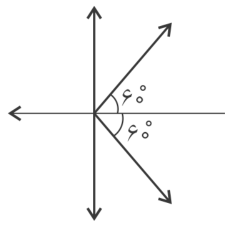


۱) ۱۲ ۲) ۱۱
۳) ۱۰ ۴) ۹
۵) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳)؛ بدیهی است به ازای n های زوج به راحتی می‌توان بردارهایی را انتخاب کرد که برآیند آن‌ها صفر باشد، کافی است هر برداری که انتخاب می‌شود، بردار قرینهٔ آن هم انتخاب شود. بنابراین به ازای n برابر ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ و ۱۲ امکان‌پذیر است.
و از طرفی بدیهی است که به ازای $n = ۱$ نیز امکان‌پذیر نیست، چون هیچ‌کدام از بردارها به تنهایی برابر صفر نیست و به همین ترتیب به ازای $n = ۱۱$ نیز امکان‌پذیر نیست، زیرا اگر برآیند ۱۱ بردار صفر گردد، بردار باقی‌مانده‌ی دیگر نیز باید صفر باشد.
(توجه داشته باشید که برآیند همهٔ ۱۲ بردار صفر است.) حال باید مقادیر ۳ ، ۵ ، ۷ و ۹ بررسی شوند. با توجه به توضیحات قبل روشن است که بررسی n به ازای مقادیر ۳ و ۵ کفایت می‌کند.
برای $n = ۳$ حالت زیر امکان‌پذیر است، یعنی می‌توان ۳ بردار یافت که برآیند آن‌ها صفر شود و درنتیجه برآیند ۹ بردار باقی‌مانده نیز صفر است.



برای $n = ۵$ نیز حالت زیر امکان‌پذیر است و درنتیجه به ازای $n = ۱۲ - ۵ = ۷$ نیز امکان‌پذیر است.



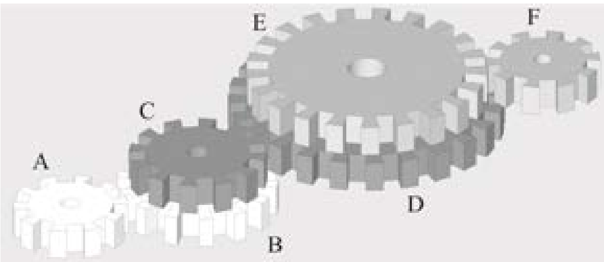
بدین ترتیب برای $n = ۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۲$ یعنی ۱۰ مقدار امکان‌پذیر است.

محاسبات

در این مثال مانند مسئلهٔ مربع‌های بخش هندسه، از این ایده استفاده می‌کنیم که یک مسئلهٔ پیچیده‌تر را به کمک یک مسئلهٔ ساده‌تر حل می‌کنیم. ایدهٔ حل مسئله با حل یک مسئلهٔ ساده‌تر در بسیاری از مسائل سخت ریاضی کاربرد دارد.

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، تعداد دنده‌های هر چرخ دنده در جدول دیده می‌شود.

A	B	C	D	E	F
۱۰	۱۴	۱۲	۲۴	۲۱	۱۰

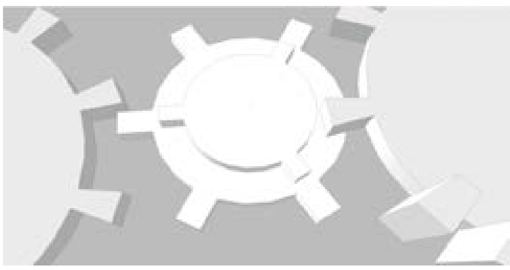


چرخ‌دنده‌های B و C به هم چسبیده‌اند، هم‌چنین چرخ‌دنده‌های D و E نیز به هم چسبیده‌اند. چرخ‌دنده‌های A و B با هم دیگر درگیر هستند، هم‌چنین چرخ‌دنده‌های C و D با یکدیگر و نیز چرخ‌دنده‌های E و F با هم درگیر هستند. اگر چرخ‌دندهٔ A در هر دقیقه ۶۰ دور بچرخد، چرخ‌دندهٔ F چند دور خواهد چرخید؟

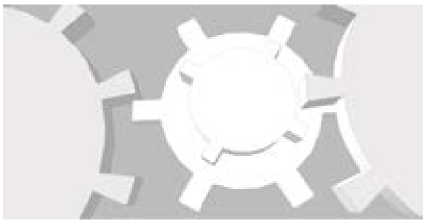
پاسخ: این پرسش در چهارمین دورهٔ «المپیادهای ریاضی نوجوانان» مطرح شد و هدف آن پیدا کردن نمودی عینی از ضرب کردن اعداد کسری $(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f})$ است.

ابتدا از راهبرد «حل مسئلهٔ ساده‌تر» استفاده می‌کنیم: فرض کن یک چرخ‌دندهٔ شش دنده‌ای که روی آن یک چرخ‌دندهٔ سه دنده‌ای چسبیده است، داشته باشیم. می‌خواهیم بدانیم که این دوتا با هم، سرعت را چند برابر می‌کنند؟

حال به شکل زیر دقت کنید، اگر چرخ‌دندهٔ شش تایی در هر دور با ۶ تا از دنده‌های چرخ‌دندهٔ چپی درگیر شود، در همان زمان چرخ‌دندهٔ سه تایی با ۳ تا از دنده‌های چرخ‌دندهٔ راستی درگیر می‌شود. پس به عبارتی سرعت را $\frac{۳}{۶}$ می‌کند، یعنی نصف.



مثلاً در حالتی دیگر (شش تایی و چهار تایی) مطابق شکل، سرعت $\frac{۴}{۶}$ می‌شود:



حال می‌توانیم مسئله را حل کنیم:

$$۶۰\times\frac{۱}{A}\times\frac{C}{B}\times\frac{E}{D}\times F=۶۰\times\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱۲}{۱۴}\times\frac{۲۱}{۲۴}\times۱۰=۶۰\times\frac{۱۲\times۲۱\times۱۰}{۱۰\times۱۴\times۲۴}=۶۰\times\frac{۳}{۴}=۴۵$$

اگر در حل مسائل خاصی دچار مشکل شدید و حس می‌کنید که نمی‌توانید ایدهٔ حل را بیابید، یکی از بهترین روش‌ها، زدن مثال‌های کوچک و استفاده از الگویابی است. در خیلی از موارد ایدهٔ حل مسئلهٔ اصلی، همان ایدهٔ حل مسئلهٔ کوچک‌تر است.

مثال: دو ظرف داریم که در هر کدام یک لیتر آب وجود دارد و مقدار آبشان با هم برابر است. ابتدا $\frac{۱}{۲}$ آب ظرف اول را در ظرف دوم می‌ریزیم، سپس $\frac{۱}{۳}$ آب ظرف دوم را در ظرف اول می‌ریزیم، سپس $\frac{۱}{۴}$ آب ظرف اول را در ظرف دوم و سپس $\frac{۱}{۵}$ آب ظرف دوم را در ظرف اول و همین‌طور ادامه می‌دهیم. اگر این روند جابه‌جایی را ۱۰۰ بار ادامه دهیم، در هر ظرف چند لیتر آب وجود خواهد داشت؟

پاسخ: ابتدا سعی می‌کنیم با راهبرد «الگویابی» کمی با مسئله دست و پنجه نرم کنیم:

	ظرف اول	ظرف دوم
حرکت اول	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$
حرکت دوم	$\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۲})=۱$	$\frac{۳}{۲}-(\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۲})=۱$
حرکت سوم	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$
حرکت چهارم	$\frac{۳}{۴}+(\frac{۱}{۵}\times\frac{۵}{۴})=۱$	$\frac{۵}{۴}-(\frac{۱}{۵}\times\frac{۵}{۴})=۱$
حرکت پنجم	$\frac{۵}{۶}$	$\frac{۷}{۶}$
حرکت ششم	$\frac{۵}{۶}+(\frac{۱}{۷}\times\frac{۷}{۶})=۱$	$\frac{۷}{۶}-(\frac{۱}{۷}\times\frac{۷}{۶})=۱$

حدسی که می‌توان زد این است که پس از حرکت‌های دوم، چهارم، ششم، هشتم، دهم و در حالت کلی بعد از حرکت‌های زوج، در هر دو ظرف یک لیتر آب وجود خواهد داشت. حالا این موضوع را ثابت می‌کنیم:

فرض می‌کنیم در حرکت $2k$ ام هستیم و در هر دو ظرف یک لیتر آب است.

حرکت $2k+1$:

ظرف اول: $1-\frac{1}{2k+1}=\frac{2k+1-1}{2k+1+1}=\frac{2k}{2k+1}$

ظرف دوم:

$$1+\frac{1}{2k+1}=\frac{2k+1+1}{2k+1}=\frac{2k+2}{2k+1}$$

حرکت $2k+2$:

ظرف دوم: $\frac{2k+2}{2k+1}-(\frac{2k+2}{2k+1}\times\frac{1}{2k+2})=\frac{2k+1}{2k+1}=1$

ظرف اول: $\frac{2k}{2k+1}+(\frac{2k+2}{2k+1}\times\frac{1}{2k+2})=\frac{2k+1}{2k+1}=1$

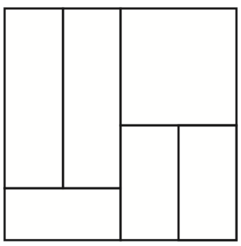
پس در حرکت $2k+2$ ام، در هر دو ظرف یک لیتر آب وجود دارد. در نتیجه بعد از حرکت ۱۰۰ اُم، در هر ظرف یک لیتر آب وجود خواهد داشت.

اگر در مسئلهٔ بعدی، بلافاصله بعد از خواندن صورت مسئله درگیر حل آن شدید، احتمالاً نمی‌توانید مسئله را حل کنید. خوب است که نگاهی از بالا به مسئله بیندازید و به دنبال راهی باشید که از فرض سؤال بیش‌ترین استفاده را بکنید.

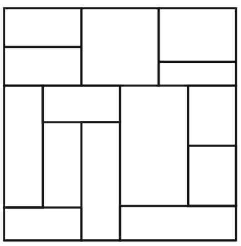
مثال: این پرسش در سال ۱۹۸۱ در المپیادهای ریاضی لیننگراد مطرح شده است و ایدهٔ حل آن ظرافت و زیرکی خاصّی دارد.

متن پرسش به این شکل است:

مربعی داریم که طول ضلع آن ۱ است. با کشیدن خطوطی موازی اضلاع آن، شکل به چند مستطیل تقسیم شده است. مثلاً ممکن است به شکل‌های زیر شود:



یا



در هر مستطیل، نسبت عرض به طول را حساب می‌کنیم تا عددی کسری تولید شود، ثابت کنید مجموع این اعداد کسری از ۱ بزرگ‌تر است.

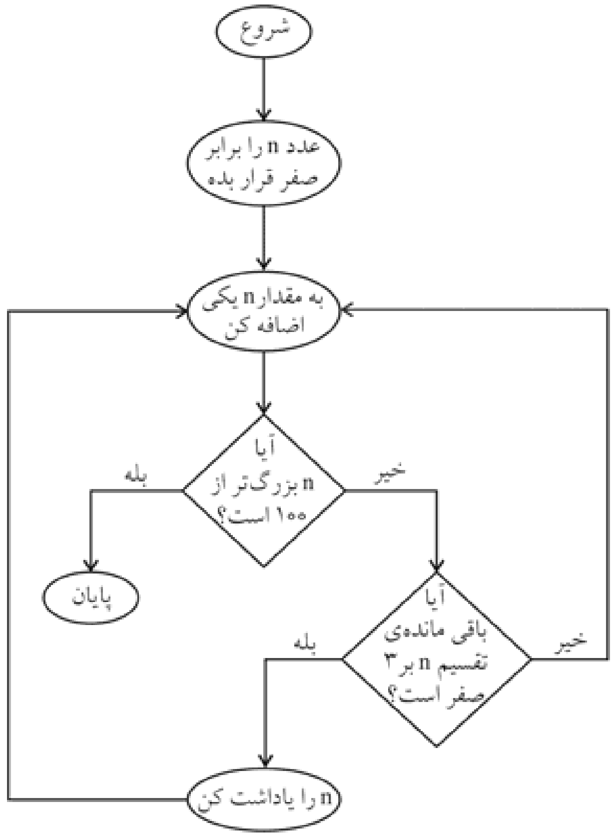
پاسخ: اگر در یک مستطیل اندازهٔ عرض و طول به ترتیب x و y باشد، آن‌گاه عدد کسری به‌صورت $\frac{x}{y}$ است. حال داریم:

$$y \leq ۱ \Rightarrow y \leq \frac{۱}{y} \Rightarrow x \times y \leq \frac{x}{y}$$

پس مجموع $\frac{x}{y}$ها از مجموع $x \times y$ها بیش‌تر است. از طرفی $x \times y$ برابر با مساحت آن مستطیل است، در نتیجه مجموع $x \times y$ها برابر با مساحت مربع می‌شود. از طرفی مساحت مربع برابر با ۱ است، بنابراین مجموع $\frac{x}{y}$ ها از ۱ بیش‌تر می‌شود.

صورت سؤال در مسئلهٔ بعدی یک نمودار است که فرایندی در آن تکرار می‌شود. ایدهٔ حل مسئله‌هایی شبیه به این، زدن مثال‌های کوچک و استفاده از الگویابی است.

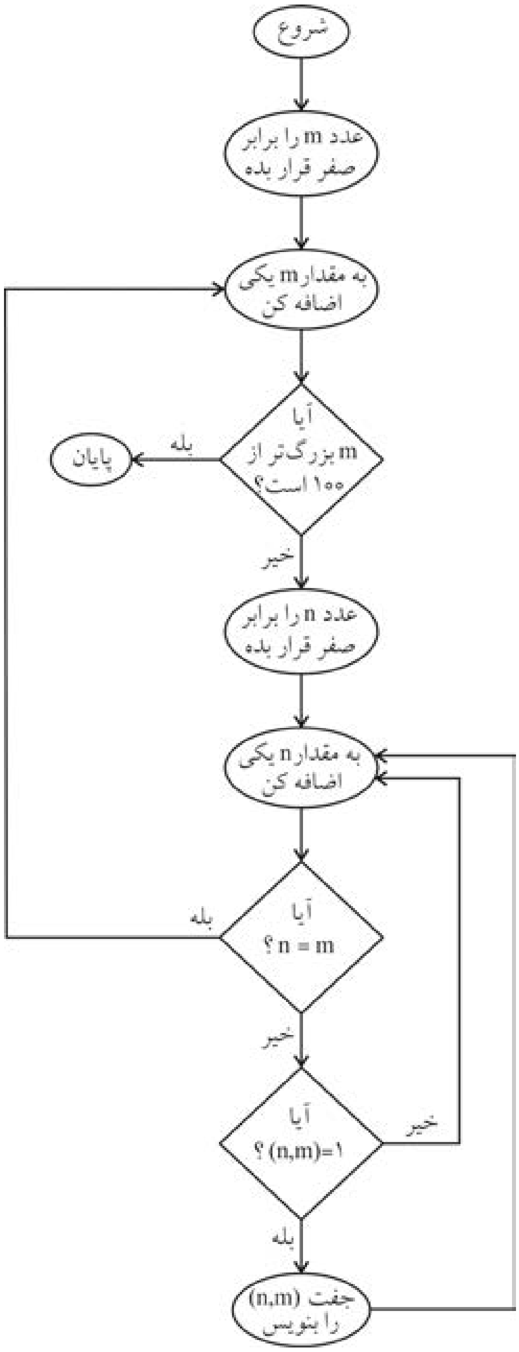
مثال: پس از اتمام اجرای نمودار زیر، چه چیزی نوشته خواهد شد؟



پاسخ: این نمودار اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به ترتیب بررسی می‌کند و آن‌هایی که باقی‌ماندهٔ تقسیم‌شان بر ۳، صفر است یا به عبارتی بر ۳ بخش‌پذیرند را یادداشت می‌کند. یعنی:

۳,۶,۹,...,۹۹

مثال: پس از اتمام اجرای نمودار زیر، چه چیزی نوشته خواهد شد؟



پاسخ: این نمودار جفت اعداد (۱,۲)، (۱,۳)، (۲,۳)، (۱,۴)، (۲,۴)، (۳,۴)، (۱,۵)، . . . (۹۸,۱۰۰) و (۹۹,۱۰۰) را به ترتیب بررسی می‌کند و آن‌هایی که ب م م شان ۱ است یا به عبارتی نسبت به هم اول‌اند را می‌نویسد. یعنی خروجی این نمودار، تمام جفت عددهای نسبت به هم اول کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ است.

بخشی از مسائل جبری به این صورت هستند که یک رابطه را به عنوان فرض به شما می‌دهند و در نهایت از شما می‌خواهند که درستی رابطهٔ دیگر را نشان دهید و یا حاصل عبارتی را محاسبه کنید.

اگر می‌خواهید این نوع مسائل را حل کنید، ابتدا به عبارت فرض و عبارت نهایی نگاهی بیاندازید و سپس سعی کنید روندی بیابید که این دو عبارت به هم مربوط شوند. مثلاً دو طرف تساوی را به توان ۲ برسانید و یا در عبارتی خاص ضرب کنید.

مثال: با فرض $x^2 + y^2 = 1$، مقدار عددی عبارت زیر چند است؟

$$2x^4 + 3x^2y^2 + y^2 + y^4$$

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) $\frac{1}{2}$ ‏ ۵) $\frac{1}{4}$

پاسخ: در این عبارت چندجمله‌ای‌های x^4، y^4 و x^2y^2 دیده می‌شود. در فرض مسئله $x^2 + y^2$ دیده می‌شود. حال این سؤال پیش می‌آید که چگونه می‌توان بین چندجمله‌ای‌های بالا و عبارت $x^2 + y^2$ رابطه برقرار کرد؟

ایده‌ای که به ذهن می‌رسد «به توان ۲ رساندن» یا «ضرب عبارت در خودش» است. یعنی:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 = 1 \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1$$

$$2x^4 + 3x^2y^2 + y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^4 + x^2y^2 + y^2 = 1 + x^4 + x^2y^2 + y^2$$

$$= 1 + x^2(x^2 + y^2) + y^2 = 1 + x^2 \times 1 + y^2 = 1 + x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$$

ایدهٔ جبری کردن مسائل بارها به کار می‌آید. با خواندن دقیق مسئله، متغیرها را مشخص و نام‌گذاری کنید. سپس فرض‌های داده شده در مسئله را با استفاده از متغیرها به صورت عبارت جبری بنویسید. حالا دیگر مسئلهٔ شما، یک مسئله جبر است!

مثال: در جشن نوروز ۱۳۹۲، تعدادی دانش‌آموز از سه کشور افغانستان، ایران و تاجیکستان شرکت داشتند. در پایان روز اول هر کدام از دانش‌آموزان به هر کدام از دانش‌آموزانی که هم وطنش نبود، یک شاخهٔ گل هدیه داد. فردای آن روز یک دانش‌آموز افغانی، یک دانش‌آموز ایرانی و یک دانش‌آموز تاجیکستانی به تعداد آن‌ها اضافه شدند و در پایان این روز نیز هر کدام به هر کس که هم‌وطنش نبود یک شیرینی محلی هدیه داد. می‌دانیم که در کل ۳۲۲ گل و ۴۱۶ شیرینی هدیه داده شده است. در این‌صورت در روز اول از هر کشور حداقل چند نفر شرکت کرده‌اند؟

۱) ۵ ‏ ۲) ۶ ‏ ۳) ۷ ‏ ۴) ۸ ‏ ۵) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳)؛ فرض می‌کنیم به ترتیب a، b و c نفر از هر کشور حضور داشته باشند. در این صورت داریم:

$$ab + bc + ac = \frac{322}{2} = 161$$

از طرفی در روز دوم داریم:

$$(a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (a+1)(c+1) = ab + bc + ac + 2(a+b+c) + 3 = \frac{416}{2} = 208$$

پس تعداد کل دانش‌آموزان $(a+b+c) = \frac{208 - 161 + 3}{2} = 22$ می‌شود. پس a، b و c سه عدد هستند که مجموعشان ۲۲ است و مجموع ضرب دوبه‌دوی آن‌ها ۱۶۱ می‌شود.